შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15	04.05.2014/ მათ/IV/M409

ამოცანა № 4 — გვერდი № 1

~~a_i და a_j~~ $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$

$Q(x)=b_nx^n+\ldots+b_0$

a_i და a_j-ის [illegible] რომ $1\le i<j\le n$ მაშინ $P(x)$-ს [illegible] $x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$-ზე [illegible].

ცხადია $3^4\equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow 3^{2012}\equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(16)-P(0) \vdots 16 \Rightarrow P(0)\equiv 1 \pmod{16}$

ვიყენებთ იმას რომ $P(x)-P(y) \vdots x-y$-ზე.

$x,y\in\mathbb{Z}$ და P-მთელ კოეფიციენტებიანია

$Q(3^{2012})-Q(0) \vdots 3^{2012} \Rightarrow Q(0)\equiv Q(3^{2012})$

$Q(3^{2012})=16$ ან $P(x)=-x+3^{2012}+16$

ახლა უნდა დავამტკიცოთ რომ $|Q(3^{2012})|<16$ არ მიიღწევა.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

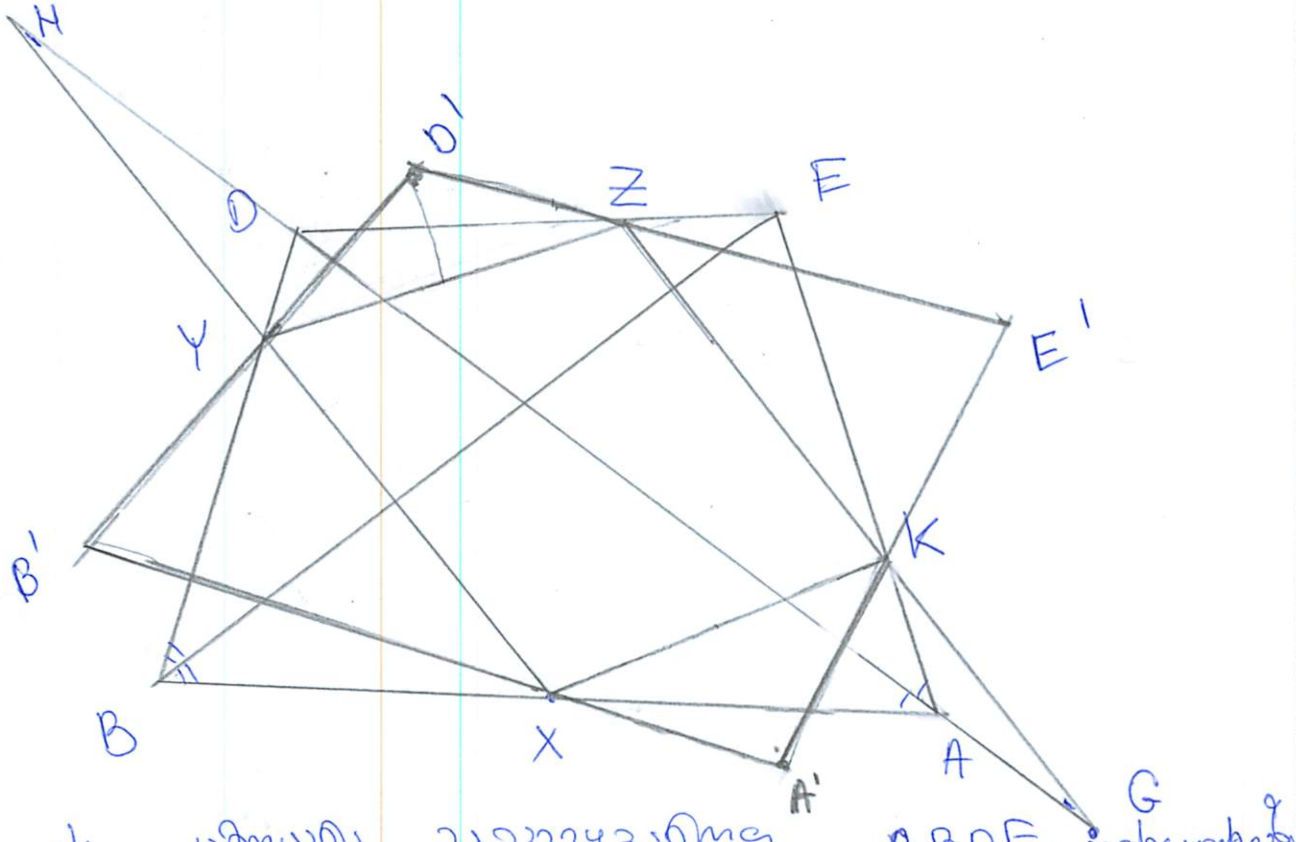
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

04.05.2014/ მათ/IV/ M409

ამოცანა № 5

გვერდი № 1



ეს ამოცანა გადავიყვანოთ ABDE ოთხკუთხედზე

თუ რომბის ვაჩვენებთ პარალელურია BE და AD-ს

მაშინ მახვილი კუთხე რომბის ტოლი იქნება $\angle DAB + \angle EBA$

რაც $\leq \max\{\angle B, \angle A\}$. განვიხილოთ რომ რომბის

ერთი გვერდი არ არის პარალელური დიაგონალის

და ვიპოვოთ მისი გადაკვეთის წერტილები.

ვიპოვოთ გადაკვეთის წერტილები G და H.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

04.05.2014/ მათ/IV/ M409

ამოცანა № 5

გვერდი № 2

ცხადია $\angle Z\cancel{H}GA = \angle XHA$. საიდან $ZK \parallel XY$

ვთქვათ $\angle A > \angle B$

ავიღოთ A' წერტილი AXK-ზე შემოხაზული წრეწირის KAX რკალზე ისე A' იყოს XK-ს შუა წერტილი ასევე მოვიძიოთ B-წერტილისთვის მაშინ $A'B' \perp XK$ და YZ-ს. ცხადია $\angle XA'K = \angle XAK$

ავიღოთ $A'X$ და $B'Y$ გადაკვეთის B' და $B'Z$ და $A'K$, E' გადაკვეთა. $B'A' \parallel XY$ და ZK-ს. $\Rightarrow$

$\Rightarrow B'E' \parallel YZ$ და XK $\angle KXA' = 90 - \frac{\angle A}{2}$

ხოლო $\angle B'\cancel{X}Y < 90 - \frac{\angle A}{2}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

04.05.2014/ მათ/IV/ M409

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$n^4+n^2+1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$

$\cancel{(n+1)^4+n^2+1)=}$ $(n+1)^4+(n+1)^2+1 = (n^2+3n+3)(n^2+n+1)$

დავამტკიცოთ რომ n^2+n+1 და n^2+3n+3 ვერ ექნებათ ერთი და იგივე გამყოფი ვთქვათ $n^2+n+1 \vdots p$ $n^2+3n+3 \vdots p$ სადაც $p \neq 2$ მაშინ

ცხადია $2(n+1) \vdots p \Rightarrow n+1 \vdots p \Rightarrow n^2+n+1 \equiv n^2 \vdots p \Rightarrow$ $\Rightarrow n \vdots p$ რაც აბსურდია.

ახლა დავამტკიცოთ რომ n^2+n+1 და n^2-n+1 ვერ ექნებათ ერთი და იგივე გამყოფი ვთქვათ

$n^2+n+1 \vdots p$ $n^2-n+1 \vdots p \xRightarrow{p \neq 2 \text{ სადაც}} 2n \vdots p \Rightarrow n \vdots p$

$n^2+n+1 \equiv 1 \vdots p$ რაც აბსურდია

ახლა დავამტკიცოთ რომ n^2+3n+3 და n^2-n+1 ვერ ექნებათ საერთო გამყოფი ვთქვათ $n^2+3n+3 \vdots p$

$n^2-n+1 \vdots p \xRightarrow{p\neq 2} 4n+2 = 2(2n+1) \vdots p \Rightarrow 2n+1 \vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n^2+4n+1 \equiv 1+2+1 \equiv 4 \vdots p$ რაც აბსურდია

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

04.05.2014/ მათ/IV/ M409

ამოცანა № 6

გვერდი № 2

აქედან გამომდინარე მათ არ აქვთ საერთო
გამყოფები ამიტომ n^2+n+1 უნდა ქონდეს ყველა
გამყოფი მარტივი გამყოფი n^2+n+1 იყოს მარტივი
თუ არა რომ $n \vdots 3$ რომ $n^2+3n+3 \vdots 9$ და ვერ
იქნება მარტივი და $n^2+n+1 > \frac{n^2+3n+3}{3}$.
n^2-n+1 რომ იყოს მარტივი $n^2+n+1 > n^2-n+1$
ამიტომ არ განიხილება $n=3k$
ახლა ვაჩვენოთ, რომ $9k^2+3k+1$ აქვს უსასრულო
ბევრი მარტივი მნიშვნელობა, სადაც $f(k)=9k^2+3k+1$
არ იქნება მუდმივი და არ ხდება ასეთი
ფუნქცია => $f(k)$-ს აქვს უსასრულოდ ბევრი მარტივი
მნიშვნელობები

რ.დ.გ.